

УДК 338.1

## Использование логарифмических функций для построения моделей устойчивого развития промышленных предприятий

*Д-р эконом. наук, проф. Сергеева И.Г.* irsergeeva@mail.ru

**Духанина Д.О.** diana\_dukhanina@rambler.ru

Университет ИТМО

191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

*В статье исследуются факторы, определяющие устойчивое развитие промышленного предприятия в условиях глобализации мировой экономики и усиления конкурентной борьбы, рассматриваются различные определения понятия устойчивого развития и виды устойчивости предприятия. Для построения модели устойчивого развития предприятия используются математические методы, учитывающие влияние на обеспечение устойчивости внешних и внутренних факторов. Математические методы используются для решения формализуемых задач, существующих на предприятии. В основе математических методов и моделей лежит использование производственной функции, которая фиксирует взаимосвязи между рассматриваемыми факторами производства и полученным результатом. Авторы отмечают необходимость исследования математических функций, пригодных для определения зависимости в конкретных производственных функциях.*

*Далее в статье проводится исследование свойств двух логарифмических функций в качестве производственных функций, определяются области их применения. Каждая из рассматриваемых моделей обладает набором определенных свойств, учитывает масштаб экономики и в качестве результирующего показателя моделирует показатель выпуска продукции. Кроме того, вторая модель анализирует не только соотношение «затраты - выпуск», но и прибыль. Полученные в результате преобразований модели позволяют моделировать разные формы зависимости между производственными ресурсами. В результате проведенного исследования определена возможность применения логарифмической функции для анализа статистических данных предприятия.*

**Ключевые слова:** устойчивое развитие, модели устойчивого развития, математические методы, производственная функция, логарифмическая функция, динамические коэффициенты.

---

## Usage of logarithmic function for constructing a sustainable development model of industrial companies

*Ph.D., prof. Sergeeva I.G.* irsergeeva@mail.ru

**Dukhanina D.O.** diana\_dukhanina@rambler.ru

ITMO University

191002, Russia, St. Petersburg, Lomonosov str., 9

*The article examines the factors that determine the sustainability of the industrial company in the conditions of economic globalization and increasing competition, the authors discuss the various definitions of sustainable development and sustainability of the company. For creating a sustainable development model of the company the authors apply mathematical methods that take into account the impact of external and internal factors on ensuring the sustainability. Mathematical methods are used to solve formalized problems of the company. The basis of mathematical methods and models is the usage of a production function that*

*captures the relationship between the production factors and the obtained result. The authors point out the necessity for the study of mathematical functions that are suitable for determining the dependence of specific production functions.*

*Later in the article the area of application of the two logarithmic functions as a production function is defined. Each of these models has a set of specific properties, and as a result the index of production output is simulated. In addition, the second model analyzes not only the ratio of "input - output", but also profit of the company. The resulting transformation model can simulate different forms of relationship between the productive resources. The study identifies the possibility of using a logarithmic function for the analysis of statistical data of the company.*

**Keywords:** sustainable development, sustainable development models, mathematical methods, production function, logarithmic function, dynamic coefficients.

Значительные структурные изменения в промышленности, вызванные научно-техническими инновациями, оказывают серьезное влияние на процессы устойчивого развития российских предприятий. В условиях мирового финансового кризиса и общей экономической нестабильности проблемы обеспечения устойчивого развития экономики в целом и отдельных предприятий в частности приобретают особую актуальность и значение. Способность системы оставаться в области устойчивости является показателем «живучести» данной системы. Адаптивными являются те системы, которые «изменяют свое поведение таким образом, чтобы оставаться в области устойчивости даже при наличии внешних воздействий» [1]. Поэтому оценка уровня устойчивого развития промышленного предприятия проводится с учетом влияния внутренних факторов структуры организации и внешних факторов, определяющих место организации в конкурентной среде. В условиях глобализации мирохозяйственных связей и усиления конкурентной борьбы от степени устойчивости развития предприятия зависит успешность его функционирования на рынке. В связи с этим возникает необходимость в формировании предприятий, обладающих свойствами, позволяющими им относительно быстро и эффективно приспосабливаться к изменяющимся условиям внешней среды.

В работе американского ученого У. Офулса было использовано понятие «общество устойчивого состояния» (sustainable state society) для определения состояния сбалансированности экономического и общественного развития, а также экологической сферы [2]. В 1987 году в докладе Международной комиссии по окружающей среде и развитию «Наше общее будущее» впервые было использовано понятие «устойчивое развитие» (sustainable development), определяемое, как «развитие, которое удовлетворяет потребности настоящего времени, но не ставит под угрозу способность будущих поколений удовлетворять свои собственные потребности» [3].

В настоящее время в научной литературе не сложилось единого и однозначного определения понятия устойчивости предприятия. Некоторые российские ученые определяют устойчивое развитие, как «стабильное социально-экономическое развитие, не разрушающее своей природной основы» [4, 9]. Другие авторы считают, что сбалансированное развитие – это «стабильное улучшение качества жизни населения в тех пределах хозяйственной емкости биосферы, превышение которых приводит к разрушению естественного механизма регуляции окружающей среды и ее глобальному изменению» [5].

Отдельные авторы рассматривают устойчивость как экономическую категорию, отражающую наиболее общие свойства и связи состояния предприятия и процесса его развития, а в качестве свойства предприятия устойчивость рассматривается как объективно существующая и меняющаяся во времени и пространстве количественно измеримая характеристика предприятия [6]. Следовательно, возможно формирование динамической модели устойчивого экономического развития промышленного предприятия с учётом выявленных существенных факторов и индикаторов устойчивости.

Данный подход позволяет рассматривать устойчивость не только как показатель стабильности и конкурентоспособности предприятия, но и оценивать устойчивость в единстве и взаимодействии ее

отдельных видов. При этом различают финансовую устойчивость, организационную устойчивость, технологическую устойчивость, экологическую устойчивость, операционную устойчивость, экологическую устойчивость и др. Для оценки каждого из видов устойчивости существует свой набор показателей, кроме того, возможна разработка интегрального показателя, характеризующего степень устойчивости предприятия в целом.

На обеспечение устойчивости развития предприятия влияют два обобщенных группы факторов: внешние условия и внутренние условия. К внешним условиям относятся факторы, влияющие на деятельность предприятия, но не подконтрольные ему. К внутренним условиям соответственно относятся те условия деятельности предприятия, на которые оно может оказывать воздействие. От того, насколько компания эффективно использует внешние возможности для решения своих внутренних стратегических задач, зависит конкурентоспособность и устойчивость ее положения на рынке [7, 8, 15].

В общем виде обеспечение устойчивого развития предприятия предполагает, с одной стороны, учет и прогнозирование изменения внешних условий, с другой стороны, такое воздействие на внутренние условия, выражающееся в выработке соответствующей политики предприятия, которое позволит максимально воспользоваться благоприятными факторами, как внешними, так и внутренними, и нейтрализовать неблагоприятные факторы.

Выработка политики предприятия, направленной на его стабильное развитие, представляет собой решение интегрированной задачи, в большинстве случаев включающей ряд частных задач, каждая из которых может быть решена отличными друг от друга методами. Граничным условием решения таких задач является подчинение их решению общей задачи.

Выбор методов решения зависит от целого ряда постоянно меняющихся факторов, связанных, например, с изменениями внешних и внутренних условий, и, следовательно, не является раз и навсегда определенным. Кроме того, появляются и новые методы либо новые варианты уже используемых методов, нуждающиеся в углубленном исследовании. В первую очередь к таким методам относятся математические методы в экономике.

Математические методы используются для решения так называемых формализуемых задач; для решения неформализуемых задач, т. е. задач, так или иначе связанных с поведением людей, которые влияют на деятельность предприятия, используются другие методы, в частности, получившие широкое распространение в последние десятилетия деловые игры.

На любом предприятии существует достаточно большой класс задач, которые относятся к числу формализуемых и соответственно должны решаться математическими методами. В то же время правила, позволяющие выбрать тот или иной конкретный метод из всей совокупности математических методов для решения конкретной задачи, до настоящего времени не выработаны. Это объясняется как недостаточной исследованностью существующих на предприятии задач и отсутствием их научно обоснованной классификации, так и практической неисследованностью области применения конкретных математических методов. В этой связи исследование возможностей использования тех или иных математических методов для решения различных типов экономических задач является крайне актуальным.

В экономике математические модели, за исключением узкоспециализированных, так или иначе основаны на исследовании и применении так называемой производственной функции, в общем виде выражающейся формулой:

$$Y = f(X),$$

где  $Y$  – выпуск продукции,

$X$  – затраты ресурсов,

$f$  – математическая функция.

Производственная функция, называемая также функцией производства, достаточно полно исследована в общетеоретическом плане и представляет собой, как отмечалось выше, уравнение,

связывающее переменные величины затрат с величиной выпуска продукции. В идеальном варианте производственная функция принимает следующий общий вид:

$$Y = f(X_1 \dots X_N),$$

где  $Y$  - результат производства (как правило, выпущенная продукция в стоимостном выражении),

$X$  - фактор, влияющий на результаты производства,

$N$  - общее количество всех факторов, влияющих на результаты производства,

при этом каждый фактор должен иметь как натуральное (часы, тонны), так и стоимостное выражение.

Теоретически такая модель позволяет определить суммарное воздействие всех факторов на производственные результаты, а использование многофакторного анализа позволяет также определить воздействие на общий результат каждого отдельного фактора, выявив, таким образом, узкие места производства. Полученные результаты должны стать основой для выработки обоснованной, с научной точки зрения, стратегии развития предприятия.

Практическое использование этой модели затруднено, либо вовсе невозможно на данном этапе развития моделирования, в силу целого ряда причин:

во-первых, крайне трудно выявить действительно все факторы, влияющие на результат;

во-вторых, не разработан математический аппарат для построения подобных моделей;

в-третьих, в большинстве случаев в силу в основном причин чисто технического плана ограничена информация, предоставляемая разработчикам моделей;

в-четвертых, ограничено время для выработки управленческих решений и, соответственно, для построения модели;

в-пятых, далеко не всегда нужна предельная точность расчетов для выяснения существующих проблем и определения способов их разрешения.

В силу указанных причин на практике происходит упрощение модели за счет сокращения числа факторов, влияющих на конечный результат (как правило, сведения их к нескольким основным), и введения общей размерности для исследуемых факторов и результата, т. е. измерение их в одних и тех же единицах (например, в стоимостных). Такая упрощенная модель не дает, конечно, абсолютно точного результата, но зато является вполне работоспособной и может быть использована для выработки экономической стратегии предприятия.

Модели этого типа наиболее широко используются для построения производственных функций макроэкономического уровня. Подобные интегрированные производственные функции характеризуют зависимость показателя совокупного общественного продукта или иного обобщающего показателя от основных факторов производства, к которым обычно относят объем капитала, рабочую силу, а также земельные ресурсы. В ряде макроэкономических производственных функций в качестве отдельного фактора учитывается также воздействие научно-технического прогресса. Макроэкономические производственные функции исследуются самостоятельно или включаются в сложные эконометрические модели.

На макроэкономическом уровне производственные функции используются также для выявления влияния отдельных факторов производства на конечный результат. В этом случае в качестве аргумента функции используется один фактор или несколько тесно связанных между собой факторов, при этом сами факторы представлены в обобщенном виде, без ненужной для макроэкономического уровня детализации.

Нужно отметить, что определение аргументов производственной функции в существенной степени зависит от масштаба объекта исследования: на макроэкономическом уровне преимущественно используются укрупненные показатели, определяемые в денежных единицах (рублях или другой валюте); на уровне предприятий (также в зависимости от их масштаба) необходимо детализировать

факторы производства, выделяя структурные подразделения и виды деятельности предприятия, а также по возможности использовать разную размерность факторов и результата, т. е. вести учет, как в денежных, так и в натуральных единицах.

Для отдельных предприятий или отраслей, выпускающих однородную продукцию, которые, с точки зрения моделирования, можно рассматривать как крупное специализированное предприятие, детализация факторов производства позволяет выяснить истинные причины изменения результата. Например, если производственная функция показывает, что увеличение затрат в полтора раза на том или ином предприятии привело к такому же увеличению выпуска продукции, то можно сделать обоснованный вывод о необходимости инвестиций в данное предприятие, однако при этом нельзя определить, куда именно должны быть направлены инвестиции. Рост выпуска продукции может быть вызван следующими факторами:

- соответствующим ростом производительности труда, т. е. за счет увеличения организационно-технических условий деятельности;
- интенсификацией труда, т. е. в связи с увеличением затрат труда в единицу времени;
- увеличением количества отработанного времени (экстенсивный путь развития предприятия);
- комбинацией этих факторов.

Детализация факторов производства позволяет достаточно точно ответить на поставленный вопрос.

Выделение в качестве основного аргумента издержек, инвестиций и т. д. привело к появлению соответственно функции издержек, инвестиционной функции и других, являющихся видами, или частными случаями, производственной функции.

Необходимо отметить, что производственная функция в общем виде лишь фиксирует факт связи между рассматриваемыми факторами производства и полученным результатом, но никак не определяет, какова эта связь, какой математической формулой она может быть выражена. Таким образом, при построении любой производственной функции возникает задача выяснения конкретного вида связи, которая может быть описана математически.

Единой формулы, пригодной для описания любой производственной функции, не найдено, и есть все основания полагать, что вряд ли она появится в ближайшее время. Более того, нет единой формулы для того или иного вида производственных функций, что делает невозможным использование каких-либо стандартных методов их построения. В этих условиях для исследователей использования производственных функций актуально наиболее точное определение существующей зависимости для конкретных производственных функций с их дальнейшей типологизацией, т. е. определением типа задач, для решения которых пригодна найденная математическая функция.

Общеметодологический подход поиска решений в этом случае состоит в следующем:

- выделяются основные факторы производства, используемые в качестве аргументов функции, и соответствующие им производственные функции;
- выбирается определенный тип задач, т. е. конкретные производственные функции;
- анализируются основные математические функции и выбираются те из них, поведение которых не противоречит поведению исследуемой производственной функции;
- проводится сравнительный анализ (при возможности) исследованных математических функций;
- в случае, когда поставленная задача успешно решена, выбранная математическая функция проверяется на возможность решения аналогичных задач и определяется тип задач, для решения которых она может быть использована.

Эти этапы не обязательно формализуемы, однако так или иначе они присутствуют в каждом исследовании.

Нужно отметить, что работа по исследованию математических функций, пригодных для определения зависимости в конкретных производственных функциях в силу целого ряда причин находится практически на начальном этапе. Это означает, что даже основные математические функции (за исключением так называемых «неоклассических» производственных функций [10]) не исследованы в качестве инструмента для описания производственных функций.

В настоящее время для описания производственных функций наиболее активно исследуется степенная функция. Ограниченный объем статьи не позволяет провести полноценный сравнительный анализ различных математических функций, поэтому лишь отметим, что поведение логарифмической функции также не противоречит поведению производственных функций и, следовательно, она нуждается в этом качестве в дополнительном исследовании.

Не претендуя на всестороннее исследование логарифмической функции, проведем изучение свойств двух логарифмических комплекснозначных функций в качестве производственных функций, а также, по возможности, определим области их применения.

Рассматриваться будут две модели:

$$Q_t = \left( a_0 + ia_1 \right) \left( b_0 + ib_1 \right) \ln \left( K_t + iL_t \right) \quad (1),$$

$$G_t + iC_t = \left( a_0 + ia_1 \right) \left( b_0 + ib_1 \right) \ln \left( K_t + iL_t \right) \quad (2),$$

Где  $K_t + iL_t$  - комплексная переменная ресурсов,

$K_t$  и  $L_t$  - базисные темпы роста основных производственных фондов и численности работников,

$G_t + iC_t$  - комплексная переменная результатов,

$G_t$  и  $C_t$  - базисные темпы роста прибыли и затрат,

$Q_t$  – базисный темп роста выпуска продукции (выручки),

$a_0, a_1, b_0$  и  $b_1$  - коэффициенты модели.

Каждая из моделей (1) и (2) учитывает масштаб экономики [11] и в качестве результирующего показателя моделирует показатель выпуска продукции  $Q_t$ , причем для функции (2) значение  $Q_t$  получается путем несложных действий над  $G_t$  и  $C_t$  (выручка или выпуск в стоимостном выражении – это сумма прибыли и затрат:  $Q_t = G_t + C_t$ ). Кроме того, вторая модель моделирует два дополнительных показателя – прибыль  $G_t$  и выручку  $C_t$ .

Строго говоря, вторая модель не является производственной функцией, поскольку анализирует не только соотношение «затраты - выпуск», но и прибыль. Последняя не обусловливается затратами ресурсов, поскольку является результатом рыночного взаимодействия. Введение переменной прибыли становится возможным при соблюдении некоторых условий – такому анализу подлежат только данные на макроуровне (статистические данные предприятия-монополиста или отрасли промышленности).

Выделим некоторые свойства изучаемых моделей (1) и (2):

1. Основание логарифмической функции не меняет основных свойств функции, поэтому можно взять любое основание. В данной работе для определенности мы взяли натуральное основание логарифма.

2. Логарифмическая функция комплексной переменной не существует в точке  $K=0, L=0$ , поэтому эта точка исключается из рассмотрения. Если нужно будет включить эту точку в рассмотрение, будем подразумевать, что линия выходит из окрестности этой точки.

3. В отличие от логарифмической функции действительного аргумента, логарифмическая функция комплексной переменной существует при любых значениях аргумента.

4. Поскольку свободный член правой части равенств характеризует начальные условия и его влияние на комплексный результат этим и ограничивается, вместо (1) и (2) будем рассматривать функции (3) и (4), более удобные для исследования:

$$Q_t = \epsilon_0 + ib_1 \ln \left( \epsilon_t + iL_t \right) \quad (3)$$

$$G_t + iC_t = \epsilon_0 + ib_1 \ln \left( \epsilon_t + iL_t \right) \quad (4)$$

5. Логарифмическая функция комплексной переменной является периодической функцией, но мы будем использовать только главное значение логарифма [12].

Тогда модель (3) примет следующий вид:

$$Q_t = \epsilon_0 + ib_1 \left( \ln \sqrt{K_t^2 + L_t^2} + i \operatorname{arctg} \frac{L_t}{K_t} \right) = \epsilon_0 + ib_1 \left( \ln r + i\varphi \right) \quad (5)$$

После некоторых преобразований представим модель (5) на множестве действительных чисел [4]:

$$\begin{cases} Q_t = b_0 \ln \sqrt{L_t^2 + K_t^2} - b_1 \operatorname{arctg} \frac{L_t}{K_t} \\ 0 = b_1 \ln \sqrt{L_t^2 + K_t^2} + b_0 \operatorname{arctg} \frac{L_t}{K_t} \end{cases} \quad (6)$$

Второе равенство системы (6) характеризует априорно заданную взаимосвязь между производственными ресурсами.

Аналогичным образом модель (4) можно привести к виду:

$$G_t + iC_t = \epsilon_0 + ib_1 \left( \ln \sqrt{L_t^2 + K_t^2} + i \operatorname{arctg} \frac{L_t}{K_t} \right) = \epsilon_0 + ib_1 \left( \ln r + i\varphi \right) \quad (7)$$

Или в виде аналога на множестве действительных чисел:

$$\begin{cases} G_t = b_0 \ln \sqrt{L_t^2 + K_t^2} - b_1 \operatorname{arctg} \frac{L_t}{K_t} \\ C_t = b_1 \ln \sqrt{L_t^2 + K_t^2} + b_0 \operatorname{arctg} \frac{L_t}{K_t} \end{cases} \quad (8)$$

Как можно заметить из равенства (6), полученные модели позволяет моделировать самые разные формы зависимости между производственными ресурсами. Эти формы определяются значениями коэффициентов  $b_0$  и  $b_1$ . Если  $b_0$  приравнять к нулю, то зависимость между ресурсами будет описываться уравнением окружности. Если приравнять нулю  $b_1$ , то зависимость между ресурсами будет описываться прямой линией. Когда эти коэффициенты не равны нулю, то зависимость между ресурсами может принимать разные формы, в том числе в виде изоквант неоклассических производственных функций. Таким образом, исследуемая модель (1) является универсальной с позиций взаимозаменяемости ресурсов.

Поскольку первое равенство системы также представляет собой комбинацию уравнения окружности и уравнение арктангенса, то оно может описывать разнообразные сочетания прямой линии и окружности. Кривая в пространстве, которая получается в результате пересечения этих двух нелинейных поверхностей, имеет сложный характер, поэтому модель дает возможность описывать сложные траектории развития производственных систем [13].

Производственные функции с действительными аргументами описывают плоскость (в линейном случае) или нелинейные поверхности в трехмерном пространстве, а модели, содержащие комплексные аргументы, описывают прямую линию, лежащую на плоскости (в линейном случае) или кривую,

лежащую на поверхностях. Это обстоятельство свидетельствует о том, что производственные функции комплексного аргумента имеют довольно узкий ареал применения по сравнению с моделями действительных переменных, но они описывают именно те процессы, описание которых моделями действительных переменных осуществляется плохо [13].

Одним из достоинств модели (3) является то, что ее коэффициенты могут быть найдены для каждого наблюдения, для этого достаточно данных по одному наблюдению. Формулу для нахождения комплексного коэффициента легко найти из выражения (5):

$$b_0 + ib_1 = \frac{Q_t}{\ln(K_t + iL_t)}. \tag{9}$$

Аналогичным образом после преобразования формулы (7) можно найти комплексный коэффициент в модели (2):

$$b_0 + ib_1 = \frac{G_t + iC_t}{\ln(K_t + iL_t)} \tag{10}$$

Применим формулы (9) и (10) к статистическим данным промышленного предприятия-монополиста за 2002-2008 гг. Данный временной период был выбран неслучайно, так как для этого периода характерно относительно стабильное и устойчивое развитие российской экономики, поэтому коэффициенты функции находятся в определенном диапазоне и не подвергаются резким колебаниям, следовательно, функция позволяет достаточно точно моделировать процесс развития предприятия. В Таблицах 1 и 2 приведены результаты вычисления комплексного коэффициента по каждому наблюдению.

Таблица 1

**Комплексный коэффициент функции вида (3)**

Год	Коэффициенты		Год	Коэффициенты	
	b <sub>0</sub>	b <sub>1</sub>		b <sub>0</sub>	b <sub>1</sub>
4 кв 2002	0,464	-1,051	4 кв 2005	0,590	-1,344
1 кв 2003	0,411	-0,924	1 кв 2006	0,850	-1,965
2 кв 2003	0,363	-0,811	2 кв 2006	0,336	-0,761
3 кв 2003	1,748	-3,810	3 кв 2006	1,568	-3,704
4 кв 2003	0,740	-1,597	4 кв 2006	1,384	-3,219
1 кв 2004	0,572	-1,195	1 кв 2007	0,308	-0,706
2 кв 2004	0,589	-1,244	2 кв 2007	0,774	-1,795
3 кв 2004	0,779	-1,667	3 кв 2007	0,501	-1,211
4 кв 2004	0,401	-0,890	4 кв 2007	0,311	-0,788
1 кв 2005	1,006	-2,266	1 кв 2008	0,088	-0,226
2 кв 2005	0,317	-0,743	2 кв 2008	0,786	-2,047
3 кв 2005	0,536	-1,234			

Таблица 2

**Комплексный коэффициент функции вида (4)**



Год	Коэффициенты		Год	Коэффициенты	
	$b_0$	$b_1$		$b_0$	$b_1$
4 кв 2002	1,059	0,485	4 кв 2005	1,358	0,625
1 кв 2003	0,961	0,509	1 кв 2006	1,952	0,817
2 кв 2003	0,819	0,383	2 кв 2006	0,709	0,202
3 кв 2003	4,032	2,347	3 кв 2006	3,513	1,096
4 кв 2003	1,700	1,021	4 кв 2006	3,009	0,859
1 кв 2004	1,217	0,635	1 кв 2007	0,607	0,054
2 кв 2004	1,267	0,653	2 кв 2007	1,773	0,719
3 кв 2004	1,661	0,761	3 кв 2007	1,123	0,287
4 кв 2004	0,856	0,310	4 кв 2007	0,671	0,043
1 кв 2005	2,129	0,650	1 кв 2008	0,398	0,481
2 кв 2005	0,655	0,099	2 кв 2008	1,756	0,132
3 кв 2005	1,208	0,456			

Из Таблиц 1 и 2 видно, что обе части комплексного коэффициента колеблются вокруг некоторой точки с небольшой амплитудой, что подтверждает возможность применения логарифмической функции для анализа статистических данных предприятия.

Логарифмическая функция применялась для моделирования экономики России за 1995-2009 гг. для вычисления динамических коэффициентов по каждому наблюдению с помощью инструмента разностных уравнений в работе [14]. Но коэффициенты менялись во времени с большим размахом не только по своим значениям, но и по знакам. Поэтому для моделирования данного процесса логарифмическая функция комплексного аргумента использоваться не может. Отметим, что динамика изменения коэффициентов  $b_0$  и  $b_1$  по каждому наблюдению может иметь и линейный характер. Подобный случай рассматривался в той же работе, где автор предлагает применить трендовую зависимость для описания динамики изменения коэффициентов.

Приведем формулы для расчета среднего продукта труда и капитала, а также предельного продукта труда и капитала для предлагаемых логарифмических моделей.

Средний продукт труда (производительность труда) APL для обеих моделей рассчитывается по формуле:

$$APL = \frac{Q_t}{L_t} = [(a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)Ln(K_t + iL_t)] \frac{C_t}{L_t L_1} \tag{11}$$

где  $C_1$  – базисный уровень ряда издержек.

После некоторых преобразований расчетная формула (11) примет вид:

$$APL = [a_0 - \frac{b_0 a_0}{b_1} - \frac{b_0^2 \varphi}{b_1} - b_1 \varphi] \frac{C_t}{L_t L_1} \tag{12}$$

Аналогичным образом рассчитывается средний продукт капитала APK:

$$APK = \frac{Q_t}{K_t} = [(a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)Ln(K_t + iL_t)] \frac{C_t}{K_t K_1} \tag{13}$$

Формула (13) преобразуется к следующему виду:

$$APK = [a_0 - \frac{b_0 a_0}{b_1} - \frac{b_0^2 \varphi}{b_1} - b_1 \varphi] \frac{C_t}{K_t K_1} \quad (14)$$

С помощью системы (6) найдем формулу для нахождения выпуска Q для модели вида (3):

$$Q = -\frac{\varphi}{b_1} (b_0^2 + b_1^2) = \frac{LnR}{b_0} (b_0^2 + b_1^2) = \frac{b_0}{LnR} (LnR^2 + \varphi^2) = -\frac{b_1}{\varphi} (LnR^2 + \varphi^2) \quad (15)$$

Аналогичным образом, с помощью системы (8) найдем формулу для нахождения выпуска Q для модели вида (4):

$$Q = G + C = LnR(b_0 + b_1) + \varphi(b_0 - b_1) \quad (16)$$

Отсюда для модели (3) имеем следующие формулы:

$$\begin{cases} MPL_1 = \frac{-K}{K^2 + L^2} \frac{b_0^2 + b_1^2}{b_1} \\ MPL_2 = \frac{L}{K^2 + L^2} \frac{b_0^2 + b_1^2}{b_0} \end{cases} \quad (17)$$

Приравняв  $MPL_1$  и  $MPL_2$ , получим интересное свойство модели (3):

$$-\frac{K}{b_1} = \frac{L}{b_0} \text{ или } L = -\frac{b_0}{b_1} K \quad (18)$$

Найдем  $MPK_1$  и  $MPK_2$ :

$$\begin{cases} MPK_1 = \frac{L}{K^2 + L^2} \frac{b_0^2 + b_1^2}{b_1} \\ MPK_2 = \frac{K}{K^2 + L^2} \frac{b_0^2 + b_1^2}{b_0} \end{cases} \quad (19)$$

Приравняв  $MPK_1$  и  $MPK_2$ , получим следующее свойство модели (4):

$$\frac{L}{b_1} = \frac{K}{b_0} \text{ или } L = \frac{b_1}{b_0} K \quad (20)$$

Для расчета предельного продукта труда  $MPL$  и предельного продукта капитала  $MPK$  в модели (4) имеем формулы:

$$MPL = \frac{L(b_0 + b_1) - K(b_0 - b_1)}{L^2 + K^2} \quad (21)$$

$$MPK = \frac{K(b_0 + b_1) + L(b_0 - b_1)}{L^2 + K^2} \quad (22)$$

Таким образом, исследование свойств логарифмической функции показало не только возможность ее применения на практике, но и позволило найти область эффективного применения логарифмической функции в качестве производственной функции. Выявленная математическая зависимость не является, разумеется, универсальной, но вполне может быть использована для построения некоторых видов производственных функций. Так, предлагаемая модель может быть использована для многовариантных прогнозных расчётов показателей выпуска, прибыли и затрат. Например, можно решить прямую задачу – по планируемым значениям затрат капитала и труда спрогнозировать выпуск в модели (1) или прибыль и затраты в модели (2). Можно также решить и обратную задачу – по желательным показателям выпуска или прибыли/затрат определить количество необходимых ресурсов.

В отличие от такой инерционной системы как экономика государства (макроуровень), предприятия (микроуровень) менее устойчивы к изменениям внешней среды, что можно наглядно увидеть в динамике изменений коэффициентов моделей в Таблицах 1, 2. Поэтому для них жизненно

важной становится выработка научно обоснованной стратегии экономического развития и ее своевременная корректировка в случае изменения внутренних и/или внешних условий, что в значительной мере способствует росту конкурентоспособности предприятия и его устойчивому развитию. В достижении этой цели существенную помощь может оказать использование производственных функций, в том числе рассмотренных выше. В этой связи предложенное в статье решение для частной производственной функции имеет не только теоретическое, но и сугубо практическое значение.

Тем не менее, следует отметить, что методика, учитывающая только количественные показатели, недостаточна для формирования механизма стабильного и устойчивого развития промышленного предприятия. На процесс устойчивого развития предприятия оказывают значительное влияние качественные не формализуемые показатели, отражающие субъективность принимаемых управленческих решений и неформальные взаимоотношения в организации.

### Список литературы

1. Carton I.F.S., Schindler A., Yates F., Marsh D. Progress Toward the Applications of Systems Science Concepts to Biology // Army Research Office, Arlington, Va., 1972, p. 65.
2. Ophuls, William, and A. Stephen Boyan, Jr. Ecology and the Politics of Scarcity Revisited: The Unraveling of the American Dream. New York: W. H. Freeman and Company, 1992.
3. Наше общее будущее. – М.: Прогресс, 1989.
4. Гутман, Г.В. Регион в формировании социального государства / Г.В. Гутман, О.П. Звягинцева, А.А. Мироедов. – М.: Финансы и статистика, 2005.
5. Региональные проблемы сбалансированного развития процесса природопользования: эколого-экономические, организационные и правовые аспекты: монография / Под ред. О.П. Литовки. - СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999.
6. Якупова Н.М., Г. Р. Яруллина. Оценка инвестиционной привлекательности предприятия как фактора его устойчивого развития // Проблемы современной экономики, 2010. - № 3 (35).
7. Сергеева И.Г., Доронина М.Н. Оценка корпоративного управления в предпринимательских структурах // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Экономика и экологический менеджмент. 2013. № 1.
8. Коваленко Б.Б., Сидорова Л.В. Эволюция научных и практических представлений о сущности и содержании корпоративных предпринимательских организаций // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Экономика и экологический менеджмент. 2015, № 2.
9. Ласкина Л.Ю., Власова М.С. Темп устойчивого роста как элемент финансовой устойчивости // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Экономика и экологический менеджмент. 2013, № 2.
10. Светульников С.Г., Абдуллаев И.С. Экономическая динамика и производственные функции // Вестник ОГУ, 2009. - №5 <http://cyberleninka.ru/article/n/ekonomicheskaya-dinamika-i-proizvodstvennye-funktsii>
11. Светульников И.С., Светульников С.Г., Степенные производственные функции комплексных переменных // Экономика и математические методы, 2012. Т. 48. № 1. С. 67—79.
12. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. С. 33.
13. Светульников И.С. Обратные производственные функции комплексного переменного // Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении: Сборник научных трудов. Выпуск №15. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2007.
14. Svetunkov Sergey. Complex-Valued Modeling in Economics and Finance. New York: Springer-Verlag, 2012.
15. Сергеева И.Г. Взаимодействие финансового и реального секторов экономики в посткризисном мире // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Экономика и экологический менеджмент. 2012, № 1.

