

УДК:378

## Теоретико-игровое моделирование прибыли предприятий олигополистической отрасли с учетом их производственных мощностей

Д-р техн. наук, проф. **Затонский Андрей Владимирович**, zxenon@narod.ru

**Копотева Анна Владимировна**, kopoteva\_av@mail.ru

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Березниковский филиал

618404, Пермский край, г. Березники, ул. Тельмана, 7

*В статье сформулирована и решена задача моделирования прибыли предприятий олигополистической отрасли в случае более двух участников с различными средними переменными затратами и ограниченными производственными мощностями на примере крупнейших участников мировой калийной отрасли. Обоснование выбора модели выполнено исходя из особенностей объекта исследования. Оценки функций спроса и затрат участников выполнены на основании имеющихся в открытом доступе данных методом регрессионного анализа. Необходимые и достаточные условия максимума прибылей позволили получить аналитическое выражение для оптимальных объемов выпуска. Далее сформулирован алгоритм коррекции найденных объемов с учетом производственных мощностей исходя из принципа рационального использования ресурсов. В соответствии с разработанным методом рассчитаны объемы выпуска четырех предприятий калийной отрасли, максимизирующие их прибыли, определена среднеотраслевая цена одной тонны хлористого калия и вычислены сами прибыли.*

**Ключевые слова:** эффективность деятельности, теоретико-игровой подход, олигополия по Курно, парный регрессионный анализ, функция затрат, мировая калийная отрасль.

---

## Game Theoretic Oligopoly Enterprises' Profit Model with Limited Productive Capacity

D.Sc **Zatonskiy A.V.**, zxenon@narod.ru

**Kopoteva A.V.**, kopoteva\_av@mail.ru

Berezniki department of «Perm National Research Polytechnic University»

618404, Perm krai, Tel'man Street, 7

*In this issue a problem of oligopoly enterprises' profit evaluation is developed and solved. It is assumed that there are more than two field enterprises with different average costs and limited productive capacities. World potash industry was chosen as a test object. Initial model choice is based upon the potash field properties. Enterprises' cost functions and field demand function were estimated using simple linear regression and open access data. Enterprises' profit maximizing yields were defined using function maximum necessary and sufficient conditions. Then their values were corrected using enterprises' productive capacities. After that average field potash unit price was estimated using demand function and potash enterprises' optimal profits were calculated.*

***Keywords: activity efficiency, game theory, Cournot competition model, regression analysis, cost function, world potash industry***

Экономическая наука выделяет два основных принципа, определяющих возможное поведение субъектов управления [1]. Первый – нормативный экономический принцип, определяющий их рациональные действия. Однако, поскольку люди не всегда действуют рационально, существует альтернативный подход – позитивный, определяющий их фактические действия. Классическое управление хозяйствующими субъектами основано преимущественно на математических методах и нормативном принципе. В этом смысле главной целью работы предприятия является получение максимальной прибыли, являющейся основным показателем эффективности деятельности и источником наращивания хозяйственного оборота. Увеличение прибыли в условиях жесткой конкуренции возможно путем внедрения организационных и технологических инновационных мероприятий [2]. Например, грамотно реализованное высвобождение персонала позволяет сократить фонд оплаты труда, снизить себестоимость и увеличить прибыль [3], а продуманный механизм адаптации сотрудников на новом месте работы [4] – сократить количество ошибочных действий, ведущих к потерям времени, сырья и иных ресурсов. По этой причине задача обоснования внедрения конкретной инновации либо отказа от него на основании прогноза финансовых последствий в обоих случаях представляет существенный интерес. В качестве прогнозируемого финансового показателя рассматривают прибыль и выбирают вариант поведения, ее максимизирующий. Поскольку большинство относящихся к высоким технологическим укладам отраслей являются олигополиями, характеризующимися тесной взаимозависимостью производителей, то решение подобной задачи для конкретного предприятия должно выполняться с учетом реакции его конкурентов. Математический метод максимизации прибылей участников олигополистической отрасли разработан в рамках теоретико-игрового подхода [5]. При этом предполагается, что предприятие может оптимизировать прибыль, варьируя объемом реализации (олигополия по Курно) или ценой единицы продукции (олигополия по Бертрану) [6]. Уравнения функций затрат и отраслевого спроса при этом считаются известными, а объемы продаж – неограниченными сверху. Зачастую рассматривается случай двух участников [7] с одинаковыми предельными затратами [8]. Непосредственное применение данной модели для максимизации прибылей предприятий мировой калийной отрасли в рамках решения задачи о приобретении инновационной продукции, сформулированной нами в [9], оказалось невозможным в силу ряда причин. Во-первых, необходимо обоснование выбора модели по Курно или Бертрану. Во-вторых, функции затрат и спроса неизвестны и подлежат определению. В-третьих, основных производителей калийной отрасли больше двух, и требуется обобщение модели дуополии на случай большего числа участников. В-четвертых, предельные (средние переменные) затраты предприятий отрасли различны, что следует учесть при расчетах. В-пятых, каждый производитель характеризуется определенной производственной мощностью, выпуск продукции свыше которой в краткосрочном периоде невозможен, что также необходимо принять во внимание. Решению задачи максимизации прибылей предприятий с неизвестными функциями затрат и известными производственными мощностями, действующих в условиях олигополии с неизвестным отраслевым спросом и посвящена данная статья.

Как отмечено ранее, для оптимизации прибылей предприятий калийной отрасли, необходимо определиться с моделью олигополии. Произведем выбор исходя из следующих теоретических соображений. Считается, что если отрасль образуют малое число производителей с приблизительно одинаковыми производственными мощностями, выпускаемый ими продукт однороден, а сговор о

ценообразовании отсутствует, то управлению с большей вероятностью подлежат объем продаж [10, С.509]. На основании сведений о крупнейших (с производственной мощностью свыше 9 млн. тонн КСI) участниках калийной отрасли, представленных в таблице 1, можно установить относительно небольшое количество предприятий и умеренный разброс их производственных мощностей. Выпускаемый продукт – хлористый калий – является однородным. Производители калия устанавливают различные цены на свою продукцию в зависимости от ее качества и целевого рынка, а объем продаж выбирают в соответствии со сложившимся спросом [11]. Это позволяет предположить отсутствие явного сговора о ценообразовании и выбрать в качестве модели калийной отрасли олигополию по Курно.

Таблица 1

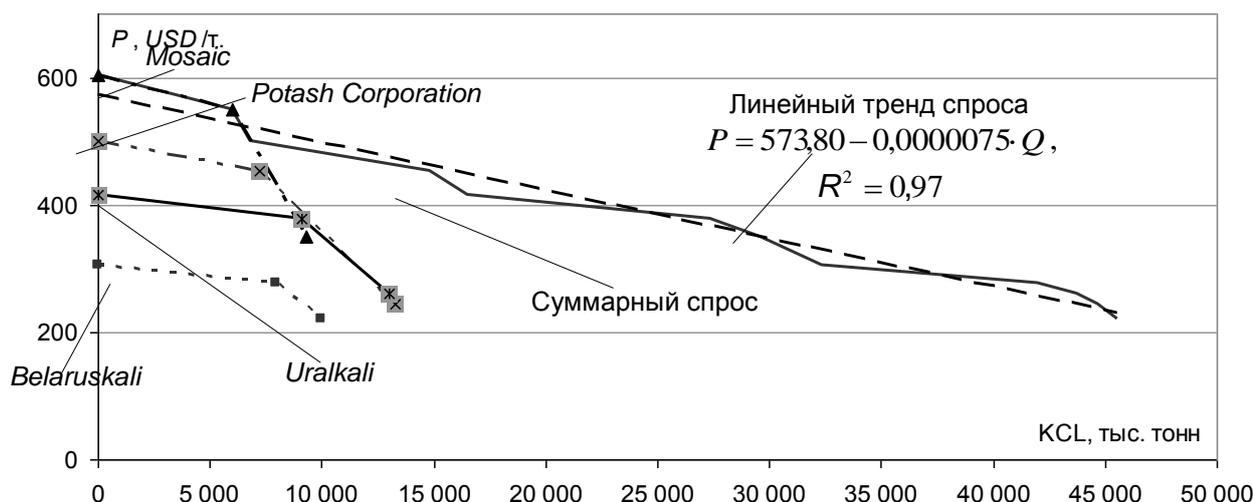
**Крупнейшие производители калийной продукции в 2012г**

№	Наименование	Страна	Фактический выпуск, тыс. тонн КСI	Производственная мощность, тыс. тонн КСI
1	<i>JSC «Belaruskali»</i> [12]	Белоруссия	7 946,00	10 000,00
2	<i>The Mosaic Company</i> [13]	США	6 016, 00	9 300,00
3	<i>Potash Corporation of Saskatchewan Inc.</i> [14]	Канада	7 230, 00	13 264,00
4	<i>OJSC «Uralkali»</i> [15]	Россия	9 100,00	13 000,00

Необходимое для решения задачи уравнение спроса оценивается по данным годовых отчетов производителей. Кривая спроса каждого участника отрасли представляет собой ломаную линию, состоящую из двух участков прямых. Первый – более эластичный – от нулевого объема до фактического, второй – менее эластичный – от фактического до производственной мощности. Это объясняется тем, что попытка данного производителя снизить цену относительно сложившегося уровня приведет к снижению цен конкурентами с целью удержать свою долю рынка, и объем реализации увеличится в меньшей степени, чем ожидалось. Суммарный спрос в отрасли складывается из индивидуальных спросов участников рынка и характеризует совокупный объем продукции, который готовы приобрести все ее покупатели у всех ее продавцов при различных уровнях цены. Явная функция зависимости цены от объема получается в результате сглаживания результирующей ломаной линейным трендом, построенным с помощью парного регрессионного анализа [16] в виде

$$P = P_0 - K \cdot \sum_{s=1}^4 Q_s \tag{1}$$

Индивидуальные спросы *Belaruskali*, *Uralkali*, *Potash Corporation* и *Mosaic*, ломаный отраслевой спрос и его основная тенденция представлены на рис. 1. Достаточно высокое качество линейного тренда позволяет использовать его для моделирования.



**Рис. 1. Суммарный и индивидуальные спросы в калийной отрасли**

Наличие в годовых отчетах сведений о совокупных затратах и натуральных объемах выпуска хлористого калия позволяет определить искомые функции затрат. Существует четыре вида зависимости общих затрат ( $TC$ ) от объемов ( $Q$ ) [10, С.390]: линейная, две квадратичных и кубическая. Выполненное нами исследование [17] показало, что наилучшим качеством обладает линейное уравнение общих затрат производителей калия ( $TC$ ) вида

$$TC_s = TFC_s + Q_s \cdot AVC_s, s = \overline{1,4}, \tag{2}$$

где константа  $TFC_s, USD$  является оценкой общих постоянных издержек производства и сбыта, коэффициент наклона ( $AVC_s, USD/t.$ ) – оценкой средних переменных затрат производства и сбыта,  $s = \overline{1,4}$  – номер производителя. Результаты оценки уравнений затрат (2) по данным годовых отчетов выбранных предприятий методом регрессионного анализа, а также характеристики их качества представлены в таблице 2.

Таблица 2

**Линейные функции затрат предприятий калийной отрасли**

№	Производитель	Уравнение затрат	<i>p-value</i>	$R^2$
1	JSC «Belaruskali»	$TC = 306479044,37 + 182,08 \cdot Q$	0,02444	0,85537
2	The Mosaic Company	$TC = 704277000,75 + 158,02 \cdot Q$	0,24574	0,56891
3	Potash Corporation of Saskatchewan Inc.	$TC = 370637606,57 + 127,28 \cdot Q$	0,04281	0,79288
4	OJSC «Uralkali»	$TC = 21402280,68 + 151,29 \cdot Q$	0,14699	0,55772

Наличие линейных уравнений спроса и затрат позволяет установить объемы выпуска, максимизирующие прибыли участников отрасли, без учета производственных мощностей. Функции прибыли выбранных для исследования предприятий имеют вид

$$\pi_s(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \left( P_0 - K \cdot \sum_{i=1}^4 Q_i - AVC_s \right) \cdot Q_s - TFC_s, s = \overline{1,4}. \quad (3)$$

Необходимым условием безусловного экстремума функции одной переменной является равенство нулю ее первой производной. В случае функции (3) оно принимает вид  $d\pi_s(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)/dQ_s = 0, s = \overline{1,4}$ . Для всех четырех производителей они представляют собой систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно объемов с отличным от нуля определителем ее матрицы. Это означает, что решение системы всегда существует, а оптимальные объемы могут быть определены. Достаточное условие максимума – отрицательность второй производной  $d^2\pi_s(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)/dQ_s^2 = -K < 0, s = \overline{1,4}$  – выполняется всегда. Можно показать, что объемы выпуска, максимизирующие прибыль (3), рассчитываются как

$$Q_i^* = \frac{1}{K \cdot (n+1)} \cdot \left( P_0 - n \cdot AVC_i + \sum_{s \neq i} AVC_s \right), i = \overline{1,4}, \quad (4)$$

где  $P_0 > 0$  и  $K > 0$  – параметры спроса,  $AVC_s, s = \overline{1,4}$  – средние переменные затраты  $s$ -го производителя. Результаты расчетов объемов выпуска калийной продукции, максимизирующих прибыли выбранных участников отрасли, представлены в таблице 3.

Таблица 3

**Оптимальные объемы выпуска хлористого калия**

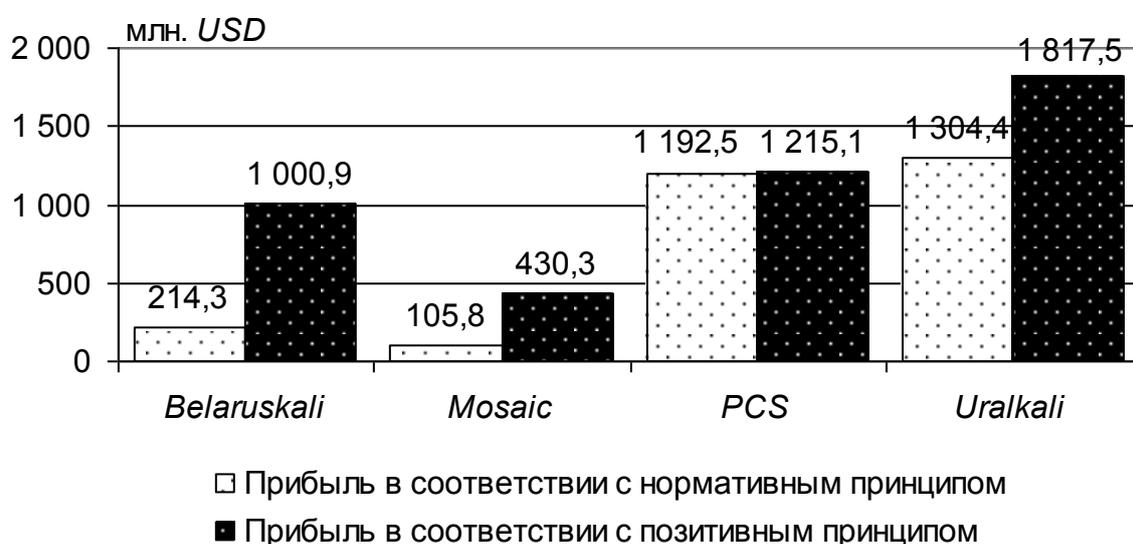
№	Производитель	Оптимальный выпуск, тыс. тонн KCl	Скорректированный оптимальный выпуск, тыс. тонн KCl
1	<i>JSC «Belaruskali»</i>	7 285,54	8 259,07
2	<i>The Mosaic Company</i>	10 425,62	9 300,00
3	<i>Potash Corporation of Saskatchewan Inc.</i>	14 524,59	13 264,00
4	<i>OJSC «Uralkali»</i>	12 842,42	13 000,00
5	Всего:	45 011,16	43 823,07

Понятно, что формула (4) позволяет учесть различный уровень затрат, но не производственную мощность конкретного производителя. В результате рассчитанный оптимальный выпуск может оказаться больше, чем фактически возможный. Сопоставляя оптимальные объемы в таблице 3 с соответствующими производственными мощностями в таблице 1 видим, что *Mosaic*, *Potash Corporation* и *Uralkali* для получения максимальной прибыли должны реализовать продукции больше, чем физически могут произвести. Для учета производственной мощности воспользуемся следующим экономическим принципом: при увеличении выпуска продукта привлечение более дорогих ресурсов целесообразно по мере исчерпания дешевых. В нашем случае это означает, что наиболее эффективные участники отрасли, оптимальные объемы (4) которых превышают производственные мощности, должны выпускать максимально возможные объемы продукции. Для остальных предприятий производится перерасчет по формуле (4) с учетом уменьшенных до максимально возможных

оптимальных объемов их конкурентов. Таким образом, последовательно за конечное число шагов получается вектор скорректированных оптимальных выпусков продукции в отрасли, удовлетворяющий ограничениям по производственной мощности (таблица 3).

Полученный результат характеризует наиболее эффективный выпуск с точки зрения рационального использования ресурсов, т.е. нормативного экономического принципа. Действительно, как отмечалось ранее, в первую очередь целесообразно загрузить на полную мощность предприятие с самыми низкими удельными затратами, т.е. *Potash Corporation* ( $AVC_3 = 127,28 \text{ USD/т.}$ , см. таблицу 2). Далее загружаем на полную мощность *Uralkali*, удельные затраты которого составляют  $AVC_4 = 151,29 \text{ USD/т.}$  и *Mosaic* ( $AVC_2 = 158,02 \text{ USD/т.}$ ). Считая их известными, определяем оптимальный объем выпуска *Belaruskali*. Подстановка суммарного скорректированного объема в уравнение спроса (1) дает среднюю цену реализации хлористого калия в размере  $P_{\text{норм}} = 573,80 - 0,0000075 \cdot 43823,07 \cdot 10^3 = 245,13 \text{ USD/т.}$  Соответствующие максимальные прибыли (3) всех четырех участников отрасли определены на рис. 2. как «нормативные», т.е. рассчитанные на основании нормативного экономического принципа.

Проверим, является ли реальное поведение продавцов калийной продукции рациональным в рассматриваемом смысле. Для этого определим среднюю фактическую цену реализации 1 тонны хлористого калия исходя из суммарного объема реализации в 2012 году (по данным таблицы 1):  $P_{\text{позит}} = 573,80 - 0,0000075 \cdot 30292,00 \cdot 10^3 = 346,61 \text{ USD/т.}$  Поскольку фактические объемы выпуска всех четырех производителей ниже оптимальных, средняя «позитивная» цена оказывается выше «нормативной», вследствие чего «позитивные» прибыли всех четырех предприятий превышают «нормативные» (рис. 2).



**Рис. 2. «Нормативная» и «позитивная» прибыль в калийной отрасли**

Анализ полученных результатов позволяет утверждать следующее:

- все производители отрасли ограничивают свой выпуск, что приводит к искусственному росту цены тонны хлористого калия примерно в 1,4 раза;
- сложившийся характер спроса таков, что повышение цен приводит к увеличению «позитивной» прибыли по сравнению с «нормативной»;

- наибольший прирост прибыли от искусственного роста цен получают производители с высокими удельными затратами – *Belaruskali* (в 4,7 раза) и *Mosaic* (в 4,1 раза), причем чем выше средние переменные затраты, тем больше эффект и наоборот;

- использование нормативного экономического принципа (исходя из рационального использования ресурсов в интересах всего общества) производителям невыгодно, поскольку дает меньшую прибыль по сравнению с позитивным (исходя из стремления к личному обогащению, зачастую во вред обществу).

Таким образом, предложенная нами модификация теоретико-игровой модели олигополии для случая более двух участников с различными затратами и ограниченными производственными мощностями позволяет не только определять оптимальные прибыли в соответствии с нормативным экономическим принципом, но и сравнивать различные варианты поведения участников между собой. Идентификация модели может быть выполнена на основании имеющихся в открытом доступе данных. Это позволяет в дальнейшем использовать ее для оценки альтернатив, имеющихся в распоряжении хозяйствующих субъектов, в задаче принятия решения о приобретении инновационной продукции.

### Список литературы

1. *Бернарке Б., Фрэнк Р.* Экономикс. Экспресс-курс. СПб.: Питер, 2012. 720 с.
2. *Портер М.Э.* Конкуренция. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 608 с.
3. *Долгополова И.В., Сироткин П.Ф.* Аутплейсмент как эффективная технология высвобождения персонала // Экономика и предпринимательство. 2014. № 8. С.844-849.
4. *Долгополова И.В.* Компетентностная модель наставника как условие эффективного управления адаптацией персонала // Економічний часопис – XXI (Economicij Casopis – XXI). 2014. № 7-8 (1). С.88-91.
5. *Зенкевич Н.А., Петросян Л.А., Янг Д.В.К.* Динамические игры и их приложения в менеджменте. СПб.: Высшая школа менеджмента, 2009. 415 с.
6. *Jeroen Hinloopen, Jan Vandekerckhove.* Dynamic efficiency of Cournot and Bertrand competition: input versus output spillovers // Journal of Economics. 2009. Vol.98, No.2. pp.119-136.
7. *X. Xiaodong, C. Bing.* Multidimensional Game of Cournot-Bertrand Model with Incomplete Information and Its Analysis // Procedia Engineering. 2012. №.29. pp.895-902.
8. *Печерский С.Л., Беляева А.А.* Теория игр для экономистов. Вводный курс. – СПб.: Изд-во Европ. Ун-та в С.-Петербурге, 2001. 342с.
9. *Коптева А.В.* Поддержка принятия решения о внедрении промышленного инновационного проекта // Новый университет. Серия: Технические науки. – 2013. – № 2(12). – С.11-15.
10. *Сию К.К.* Управленческая экономика. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 671 с.
11. *Тимофеев В.И., Казанцева И.Г.* Определение объемов производства в краткосрочном периоде на предприятиях с локальными вертикально интегрированными производствами (на примере предприятий горнохимической промышленности по добыче и обогащению природных калийных солей). – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та (Березниковский филиал), 2007. – 241 с.
12. Финансовая отчетность ОАО «Беларуськалий» // Официальный сайт ОАО «Беларуськалий». URL: [http://www.kali.by/company/information\\_and\\_reports/financial-results/index.php](http://www.kali.by/company/information_and_reports/financial-results/index.php) (дата обращения 17.10.2014)

13. The Mosaic Company 2013 Annual Report // Официальный сайт The Mosaic Company. URL: <http://investors.mosaicco.com/file.aspx?IID=4097833&FID=18261747&O=3&OSID=9> (дата обращения 17.10.2014)
14. Potash Corporation 2013 Annual Integrated Report // Официальный сайт Potash Corporation. URL: [http://potashcorp.s3.amazonaws.com/2013\\_PotashCorp\\_Annual\\_Integrated\\_Report.pdf](http://potashcorp.s3.amazonaws.com/2013_PotashCorp_Annual_Integrated_Report.pdf) (дата обращения 17.10.2014)
15. Годовой отчет ОАО «Уралкалий» 2013 // Официальный сайт ОАО «Уралкалий» URL: [http://www.uralkali.com/ru/investors/reporting\\_and\\_disclosure/annual/](http://www.uralkali.com/ru/investors/reporting_and_disclosure/annual/) (дата обращения 17.10.2014)
16. Дуггерти К. Введение в эконометрику. М.: ИНФРА-М, 2007. 432 с.
17. Конотева А.В., Затонский А.В. Регрессионный анализ издержек мировых производителей калийной продукции // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2013. № 11. – С.224-234.
18. Бобкова Е.Ю. Принцип изменения в формировании ресурсных факторов производства предприятия // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Экономика и право. 2013. № 7-8. С. 67-69.

## References

1. Bernarke B., Frenk R. *Ekonomiks. Ekspres-kurs*. SPb.: Piter, 2012. 720 p.
2. Porter M.E. *Konkurentsiya*. M.: Izdatel'skii dom «Vil'yams», 2005. 608 p.
3. Dolgoplova I.V., Sirotkin P.F. *Autpleisment kak effektivnaya tekhnologiya vysvobozhdeniya personala // Ekonomika i predprinimatel'stvo*. 2014. № 8. P.844-849.
4. Dolgoplova I.V. *Kompetentnostnaya model' nastavnika kak uslovie effektivnogo upravleniya adaptatsiei personala // Ekonomichnii chasopis – KhKhI (Ekonomichnij Casopis – XXI)*. 2014. № 7-8 (1). P.88-91.
5. Zenkevich N.A., Petrosyan L.A., Yang D.V.K. *Dinamicheskie igry i ikh prilozheniya v menedzhmente*. SPb.: Vysshaya shkola menedzhmenta, 2009. 415 p.
6. Jeroen Hinlopen, Jan Vandekerckhove. *Dynamic efficiency of Cournot and Bertrand competition: input versus output spillovers // Journal of Economics*. 2009. Vol.98, No.2. p.119-136.
7. X. Xiaodong, C. Bing. *Multidimensional Game of Cournot-Bertrand Model with Incomplete Information and Its Analysis // Procedia Engineering*. 2012. №.29. pp.895-902.
8. Pecherskii S.L., Belyaeva A.A. *Teoriya igr dlya ekonomistov. Vvodnyi kurs*. – SPb.: Izd-vo Evrop. Un-ta v S.-Peterburge, 2001. 342p.
9. Kopoteva A.V. *Podderzhka prinyatiya resheniya o vnedrenii promyshlennogo innovatsionnogo proekta // Novyi universitet. Seriya: Tekhnicheskie nauki*. – 2013. – № 2(12). – P.11-15.
10. Sio K.K. *Upravlencheskaya ekonomika*. – M.: INFRA-M, 2000. – 671 p.
11. Timofeev V.I., Kazantseva I.G. *Opredelenie ob'emov proizvodstva v kratkosrochnom periode na predpriyatiyakh s lokal'nymi vertikal'no integrirovannymi proizvodstvami (na primere predpriyatii gornokhimicheskoi promyshlennosti po dobyche i obogashcheniyu prirodnykh kaliinykh solei)*. – Perm': Izd-vo Perm. gos. tekhn. un-ta (Bereznikovskii filial), 2007. – 241 p.
12. *Finansovaya otchetnost' OAO «Belarus'kalii» // Ofitsial'nyi sait OAO «Belarus'kalii*. URL: [http://www.kali.by/company/information\\_and\\_reports/financial-results/index.php](http://www.kali.by/company/information_and_reports/financial-results/index.php) (data obrashcheniya 17.10.2014)

13. The Mosaic Company 2013 Annual Report // Ofitsial'nyi sait The Mosaic Company. URL: <http://investors.mosaicco.com/file.aspx?IID=4097833&FID=18261747&O=3&OSID=9> (data obrashcheniya 17.10.2014)
14. Potash Corporation 2013 Annual Integrated Report // Ofitsial'nyi sait Potash Corporation. URL: [http://potashcorp.s3.amazonaws.com/2013\\_PotashCorp\\_Annual\\_Integrated\\_Report.pdf](http://potashcorp.s3.amazonaws.com/2013_PotashCorp_Annual_Integrated_Report.pdf) (data obrashcheniya 17.10.2014)
15. Godovoi otchet OAO «Uralkalii» 2013 // Ofitsial'nyi sait OAO «Uralkalii» URL: [http://www.uralkali.com/ru/investors/reporting\\_and\\_disclosure/annual/](http://www.uralkali.com/ru/investors/reporting_and_disclosure/annual/) (data obrashcheniya 17.10.2014)
16. Dougerti K. Vvedenie v ekonometriku. M.: INFRA-M, 2007. 432 p.
17. Kopoteva A.V., Zatonskii A.V. Regressionnyi analiz izderzhek mirovykh proizvoditelei kaliinoi produktsii // *Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten' (nauchno-tekhnicheskii zhurnal)*. 2013. № 11. – P.224-234.
18. Bobkova E.Yu. Printsip izmeneniya v formirovanii resursnykh faktorov proizvodstva predpriyatiya // *Sovremennaya nauka: aktual'nye problemy teorii i praktiki. Seriya: Ekonomika i pravo*. 2013. № 7-8. P. 67-69.